VJEŽBE IZ MATEMATIKE 2

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 8

Linearna aproksimacija funkcije više varijabla, tangentna ravnina, diferencijal

Poglavlje 1

Linearna aproksimacija funkcija više varijabla, tangencijalna ravnina, diferencijal.

1.1 Tangencijalna ravnina

Proučavamo sljedeći problem: za plohu danu jednadžbom (implicitnom ili eksplicitnom) treba naći tangencijalnu ravninu koja prolazi danom točkom (na samoj plohi ili se nalazi izvan nje).

Formula koju ovdje koristimo glasi: neka je $T_0(x_0, y_0, z_0)$ neka točka *na plohi* zadanoj *eksplicitno* jednadžbom $z = f(x, y)$. Ako postoje $f_x(x_0, y_0)$ i $f_y(x_0, y_0)$ (i vrijede još neki uvjeti koji nas ovdje neće zanimati), onda ploha u točki T_0 ima tangencijalnu ravninu i njena jednadžba glasi

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Primjer 1 Odredite tangencijalnu ravninu na graf funkcije $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ povučenu u točki $(4, 1, z_0)$ tog grafa.

Rješenje: Najprije ćemo odrediti točku z_0 iz činjenice da je točka $(4, 1, z_0)$ na grafu funkcije f – to znači da koordinate te točke zadovoljavaju jednakost (uz $x_0 = 1, y_0 = 1$)

$$z_0 = f(x_0, y_0) = f(4, 1) = 1 \cdot \sqrt{4} - 1^2 - 4 + 6 \cdot 1 = 3.$$

Kako bismo iskoristili formulu za tangencijalnu ravninu potrebno je još izračunati $f_x(x_0, y_0)$ i $f_y(x_0, y_0)$:

$$f_x(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 \quad \Rightarrow \quad f_x(4, 1) = \frac{1}{2\sqrt{4}} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$
$$f_y(x, y) = \sqrt{x} - 2y + 6 \quad \Rightarrow \quad f_y(4, 1) = \sqrt{4} - 2 \cdot 1 + 6 = 6.$$

Sada prema formuli za jednadžbu tangencijalne ravnine imamo

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}(x-4)+6(y-1)-(z-3) &= 0 \quad / \cdot (-4) \\ 3x-12-24y+24+4z-12 &= 0 \\ 3x-24y+4z &= 0 \end{aligned}$$

Primjer 2 Izračunajte tangencijalnu ravninu plohe $z = x^2y$ u točki $(2,1,4)$.

Rješenje: Najprije provjeravamo da se točka $(2,1,4)$ doista nalazi naplohi $z = x^2y$: $4 = 2^2 \cdot 1$. Potom računamo vrijednosti prvih derivacija u točki $(2,1,4)$:

$z_x(x,y) = 2xy \Rightarrow z_x(2,1) = 4$

$z_y(x,y) = x^2 \Rightarrow z_y(2,1) = 4.$

Jednadžba ravnine dobiva se uvrštavanjem u gornju formulu:

$4(x-2)+4(y-1)-(z-4) = 0 \Rightarrow 4x+4y-z = 8.$

Napomena: Može se dogoditi da je potrebno naći tangencijalnu ravninu na plohu koja nije zadana eksplicitno. Za *implicitno* zadanu plohu $F(x,y,z) = 0$ koristimo sljedeću formulu za tangencijalnu ravninu u točki $(x_0, y_0, f(x_0,y_0) = z_0)$ *na plohi*:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0.$$

Primijetite da je formula za tangencijalnu ravninu na plohu zadanu eksplicitno dobivena iz ove formule ako se uzme da je u eksplicitnom slučaju funkcija F dana s $F(x,y,z) = f(x,y) - z$.

Primjer 3 Odredite tangencijalnu ravninu plohe $\mathcal{P} \ldots xz^2 + x^2y = 6$ povučene u točki $M(x>0,2,1)$.

Rješenje: Izračunajmo najprije koordinatu točke x. Kako se točka M nalazi na plohi, njene koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu plohe. Uvrštavanjem i korištenjem činjenice $x > 0$ imamo

$x + 2x^2 = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$

Računamo dalje prve derivacije funkcije $F(x,y,z) := xz^2 + x^2y - 6$, uvrštavajući potom koordinate točke $M(\frac{3}{2},2,1)$:

$F_x(x,y,z) = z^2 + 2xy \Rightarrow F_x(\frac{3}{2},2,1) = 7$

$F_y(x,y,z) = x^2 \Rightarrow F_y(\frac{3}{2},2,1) = \frac{9}{4}$

$F_z(x,y,z) = 2xz \Rightarrow F_z(\frac{3}{2},2,1) = 3$

Jednadžba ravnine glasi:

$7(x-\frac{3}{2}) + \frac{9}{4}(y-2) + 3(z-1) = 0 \Rightarrow 28x + 9y + 12z = 72.$

Primjer 4 Na plohi $x^2+y^2-z^2-2x = 8$ nađite točke u kojima je tangencijalna ravnina paralelna s koordinatnom ravninom $y = 0$.

Rješenje:

Tangencijalna ravnina na zadanu plohu će u nekoj točki (x_0,y_0,z_0) biti paralelna na ravninu $y = 0$ ako su vektori normala tih ravnina kolinearni.

Nađimo najprije opći oblik tangencijalne ravnine na plohu $x^2+y^2-z^2-2x = 8$ za proizvoljnu točku plohe (x_0,y_0,z_0). S obzirom da je ploha zadana implicitno, definiramo $F(x,y,z) := x^2+y^2-z^2-2x-8$ i računamo

$F_x(x,y,z) = 2x - 2 \Rightarrow F_x(x_0,y_0,z_0) = 2x_0 - 2$
$F_y(x,y,z) = 2y \Rightarrow F_y(x_0,y_0,z_0) = 2y_0$
$F_z(x,y,z) = -2z \Rightarrow F_z(x_0,y_0,z_0) = -2z_0.$

Stoga jednadžba tangencijalne ravnine glasi

$(2x_0 - 2)(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0 \ \ / : 2$
$(x_0 - 1)x + y_0 y - z_0 z - (x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 2x_0) = x_0.$

Kako je (x_0, y_0, z_0) na plohi, ta točka zadovoljava jednadžbu plohe, tj. vrijedi $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 2x_0 = 8$, pa sređeni oblik jednadžbe tangencijalne ravnine glasi

$(x_0 - 1)x + y_0 y - z_0 z = 8 + x_0 \qquad (*)$

Zadano je da ova ravnina mora biti paralelna ravnini $y = 0$, pa imamo kolinearnost među vektorima normala: $\frac{x_0-1}{0} = \frac{y_0}{1} = \frac{-z_0}{0}$. Odavdje izlazi $x_0 = 1$, $z_0 = 0$, što uvrštanjem u jednadžbu plohe daje $y_0^2 = 9$. Imamo dva rješenja:

(1) $y_0 = 3$. Zajedno s $x_0 = 1$, $z_0 = 0$ imamo točku $(1, 3, 0)$. Uvrštanjem u $(*)$ dobivamo da je jednadžba tangencijalne ravnine $3y = 9$, tj. $y = 3$.

(2) $y_0 = -3$. Zajedno s $x_0 = 1$, $z_0 = 0$ imamo točku $(1, -3, 0)$. Uvrštanjem u $(*)$ dobivamo da je jednadžba tangencijalne ravnine $3y = -9$, tj. $y = -3$.

Zaključak je da se u dvije točke na plohi postiže uvjet paralelnosti tangencijalne ravnine s $y = 0$. To su točke $(1, 3, 0)$ i $(1, -3, 0)$, a tangencijalne ravnine su $y = 3$ i $y = -3$, redom.

Zadatak 5 Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $\mathcal{P} \ldots z - xy = 0$ koja je okomita na pravac $\frac{x}{2} = \frac{y-\pi}{1} = \frac{z+3}{1}$.

Zadatak 6 Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine plohe $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ paralelne sa $2x + y + 3z = 1$.

Zadatak 7 Odredite ravninu tangencijalnu na elipsoid $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ koja je usporedna ravnini zadanoj jednadžbom $x - y + 2z - \ln 2 = 0$.

Zadatak 8 Sfera Σ zadana je jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na Σ koja sadrži točke $T_1(1, 3, 1)$, $T_2(2, 1, 1)$.

1.2 Linearna aproksimacija funkcija dviju varijabla

Koristimo sljedeću formulu *linearne aproksimacije* za približnu vrijednost funkcije f u točki $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Napomena:

Ova se formula najčešće koristi za izračunavanje vrijednosti funkcije f u točkama koje se nalaze *dovoljno blizu* točkama čiju je funkcijsku vrijednost lako izračunati. Dakle, u pravilu su Δx i Δy "dovoljno" mali da stvarna vrijednost funkcije u točki odgovara aproksimativnoj vrijednosti danoj gornjom formulom.

Primjer 9 Zadana je funkcija $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x^2y^2$. Korištenjem formule za linearnu aproksimaciju izračunajte približno $f(1.95, 2.1)$.

Rješenje:

Najprije odredimo točku $(x_0, y_0) = (2,2)$ koja se nalazi "dovoljno" blizu zadanoj točki, a potom i $\Delta x = -0.05$, $\Delta y = 0.1$. Kako bismo iskoristili formulu za linearnu aproksimaciju, potrebno je izračunati vrijednost funkcije u točki (x_0, y_0), kao i vrijednosti parcijalnih derivacija prvog reda u toj točki:

$$\begin{aligned} f(2,2) &= 2^2 + 2^2 - 4 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = -56 \\ f_x(x,y) &= 2x - 8xy^2 \Rightarrow f(2,2) = 2 \cdot 2 - 8 \cdot 2 \cdot 2^2 = -60 \\ f_y(x,y) &= 2y - 8x^2y \Rightarrow f(2,2) = 2 \cdot 2 - 8 \cdot 2^2 \cdot 2 = -60, \end{aligned}$$

pa uvrštavanjem u formulu dobivamo

$$\begin{aligned} f(1.9, 2.1) &\approx f(2,2) + f_x(2,2) \cdot \Delta x + f_y(2,2) \cdot \Delta y = \\ &= -56 - 60 \cdot (-0.05) - 60 \cdot 0.1 = -56 - 60 \cdot 0.05 = -56 - 3 = -59. \end{aligned}$$

Primjer 10 Izračunajte približno $\sqrt[3]{5.7 + \sqrt[4]{15.8}}$.

Rješenje: Kao i obično u zadacima s računom približne vrijednosti, potrebno je formirati funkciju koja opisuje gornji izraz. Ovdje će to očito biti funkcija $f(x,y)$ dviju varijabli dana s $f(x,y) = \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{y}}$. Točka s kojom radimo je $(5.7, 15.8)$, pa je $x_0 + \Delta x = 5.7$, $y_0 + \Delta y = 15.8$. Odavdje izlazi da je najprikladnije uzeti (biramo najbliže "lijepe" vrijednosti) $x_0 = 6$, $\Delta x = -0.3$ te $y_0 = 16$, $\Delta y = -0.2$. Računamo sve sumande koji su potrebni za desnu stranu formule:

$f(x_0, y_0) = f(6, 16) = \sqrt[3]{6 + \sqrt[4]{16}} = \sqrt[3]{6+2} = 2$

$f_x(x,y) = \frac{1}{3}(x + y^{\frac{1}{4}})^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f_x(6,16) = \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{12}$

$f_y(x,y) = \frac{1}{3}(x + y^{\frac{1}{4}})^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}} \Rightarrow f_y(6,16) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot 16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{384}$

Sada je

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{5.7 + \sqrt[4]{15.8}} &= f(5.7, 15.8) \approx \\ &\approx f(6,16) + f_x(6,16) \cdot (-0.3) + f_y(6,16) \cdot (-0.2) = \\ &= 2 - \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{10} - \frac{1}{384} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3791}{1920}. \end{aligned}$$

Zadatak 11 Koristeći formulu za linearnu aproksimaciju izračunajte približno vrijednost izraza:

(1) $\sqrt{5.8 + \sqrt[3]{1 - 3.1^2}}$

(2) $\sqrt[3]{6.1 + \sqrt{3.98}}$

(3) $\frac{1.05^2}{\sqrt[3]{7.9 \cdot \sqrt[4]{1.05^3}}}$

Zadatak 12 Odredite približno $z(0.2, 0.9)$ ako je $z = z(x,y)$ zadana implicitno s $xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 28 = 0$.

Primjer 13 Izračunajte približno polumjer opisane kružnice pravokutnika stranica $a = 6.2$, $b = 7.8$.

Rješenje: Lako se vidi da za promjer $2r$ kružnice opisane pravokutniku vrijedi $(2r)^2 = a^2 + b^2$, pa je $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Stoga definiramo $r = r(a,b) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ da bude funkcijska ovisnost polumjera kružnice opisane pravokutniku stranica a i b. U našem slučaju treba izračunati $r(6.2, 7.8)$, pa definiramo $a_0 = 6$, $\Delta a = 0.2$, $b_0 = 8$, $\Delta b = -0.2$. Računamo:

$r(6,8) = \frac{1}{2}\sqrt{6^2+8^2} = 5$

$r_a(a,b) = \frac{1}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2a = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow r_a(6,8) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$r_b(a,b) = \ldots = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow r_b(6,8) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

Sada je

$r(6.2, 7.8) \approx r(6,8) + r_a(6,8)\cdot(0.2) + r_b(6,8)\cdot(-0.2) = 5 + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{124}{25}$.

Zadatak 14 Izračunajte približno polumjer kružnice sa središtem u ishodištu koja prolazi točkom $T(6.9, 24.2)$.

Zadatak 15 Izračunajte približno promjenu oplošja uspravne kvadratne prizme površine plašta $P = 48$ i obujma $V = 36$, ako se stranica poveća za 0.02, a visina smanji za 0.03.

Zadatak 16 Zatvoreni sanduk kojemu su vanjske dimenzije 10 cm, 8 cm i 6 cm napravljen je iz šperploča debljine 2 mm. Odredite približno količinu materijala utrošenog za izradu sanduka.

Zadatak 17 Izračunajte približno $1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$ (koristi se formula analogna gornjoj, ali za funkciju *triju* varijabli).

1.3 Diferencijal

Diferencijal $df(x,y)$ funkcije dviju varijabli $f(x,y)$ računamo prema formuli

$$df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy.$$

Primjer 18 Izračunajte diferencijal funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x^2y^2$.

Rješenje: Najprije računamo parcijalne derivacije prvog reda funkcije $f(x,y)$:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x - 8xy^2 \\ f_y(x,y) &= x^2 - 8x^2y, \end{aligned}$$

te nakon toga možemo prema gornjoj formuli odmah napisati diferencijal:

$$df(x,y) = (2x - 8xy^2)dx + (x^2 - 8x^2y)dy.$$

Primjer 19 Izračunajte diferencijal funkcije $f(x,y) = x^2 \cos xy$.

Rješenje: Iz računa parcijalnih derivacija prvog reda

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x\cos xy - x^2\sin(xy)\cdot y = 2x\cos xy - x^2y\sin xy \\ f_y(x,y) &= -x^2\sin xy \cdot x = -x^3\sin xy \end{aligned}$$

slijedi da diferencijal ove funkcije glasi

$$df(x,y) = (2x\cos xy - x^2 y \sin xy)dx - x^3 \sin xy dy$$

Zadatak 20 Izračunajte diferencijal sljedećih funkcija:

(1) $f(x,y) = 5x^3y^2 - 9$

(2) $f(x,y) = e^{x-2y}$

(3) $f(x,y) = \arcsin xy^2$

(4) $f(x,y) = x^4 \sin xy^3$

(5) $f(x,y) = \sin e^{x-y}$

(6) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

(7) $f(x,y) = x^3 \ln 1 + xy^{-\frac{3}{5}}$

(8) $f(x,y) = \sqrt{3x^5y - 7x^3y}$

(9) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

(10) $f(x,y) = y^{-\frac{3}{2}} \tan^{-1} \frac{x}{y}$.